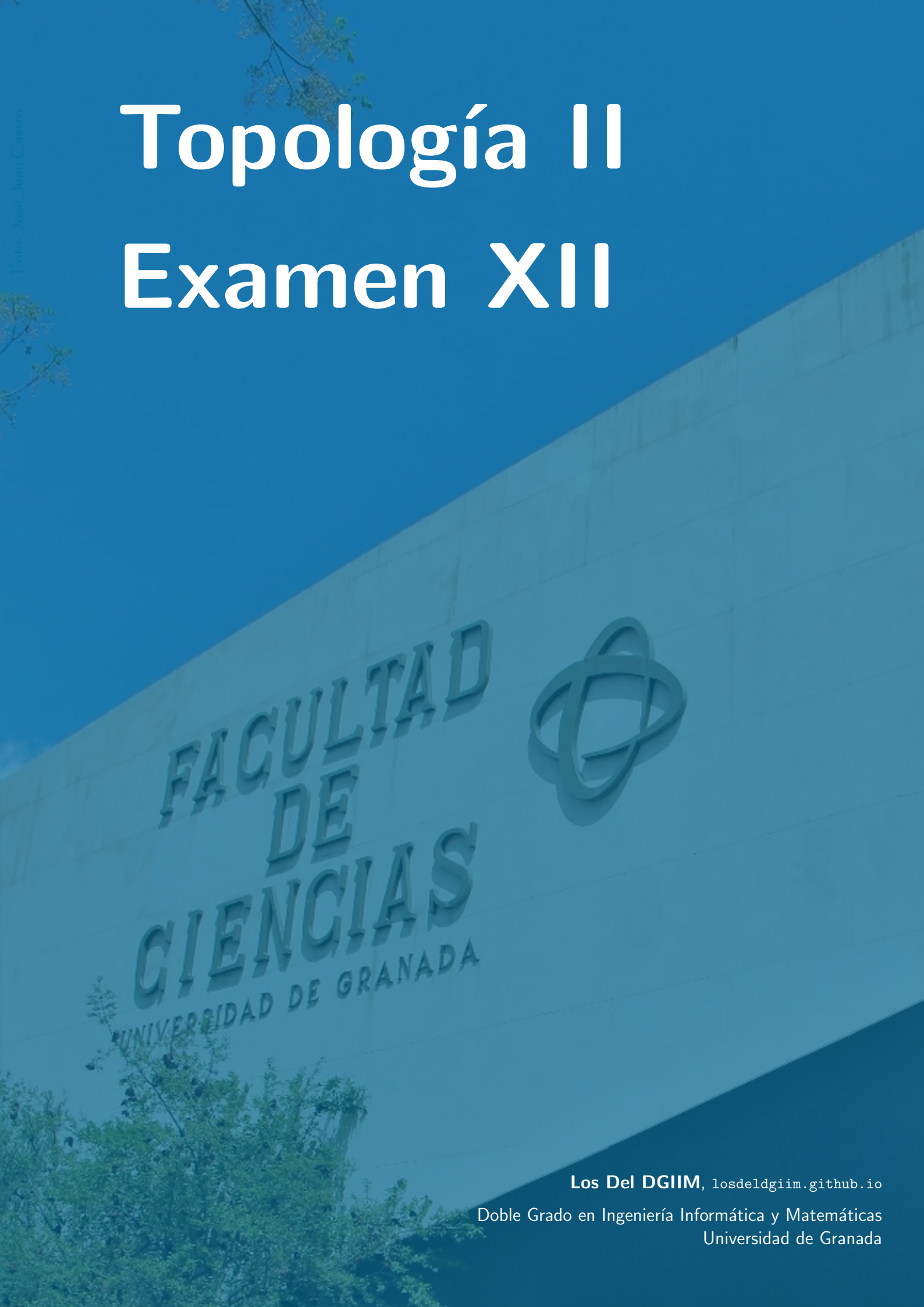
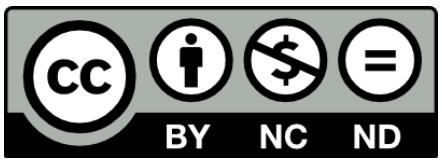
Topología II
Examen XII



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Topología II
Examen XII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2026

Asignatura Topología II.

Curso Académico 2026/2027.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor José Antonio Gálvez López.

Descripción Parcial Tema 1.

Fecha 18 de noviembre de 2026.

Duración 50 minutos.

Ejercicio 1 (5 puntos)**.** Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (responde solo a dos de las tres afirmaciones):

1. Si $p : R \to B$ una aplicación recubridora y $r_0 \in R$, entonces la aplicación inducida $p_* : \pi_1(R, r_0) \to \pi_1(B, p(r_0))$ es inyectiva.
2. Si $f : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{S}^1$ es una aplicación continua y $x_0 \in \mathbb{RP}^2$, entonces el homomorfismo $f_* : \pi_1(\mathbb{RP}^2, x_0) \to \pi_1(\mathbb{S}^1, f(x_0))$ es trivial.
3. Si $X = U \cup V$ con U, V abiertos simplemente conexos entonces X es simplemente conexo.

Ejercicio 2 (5 puntos)**.** Consideremos el cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ y $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ un arco inyectivo que interseca al cilindro exactamente en los puntos $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$. Calcula el grupo fundamental de

$$X = (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \cup \alpha([0,1])$$

en un punto $p_0 \in X$. Determina lazos basados en p_0 cuyas clases de equivalencia generen $\pi_1(X, p_0)$.

Solución.

Ejercicio 1 (5 puntos)**.** Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (responde solo a dos de las tres afirmaciones):

1. Si $p : R \to B$ una aplicación recubridora y $r_0 \in R$, entonces la aplicación inducida $p_* : \pi_1(R, r_0) \to \pi_1(B, p(r_0))$ es inyectiva.

   Las aplicaciones recubridoras más comunes que conocemos son:

   - Los homeomorfismos, cuya aplicación inducida es un isomorfismo, por lo que es inyectiva.
   - La aplicación recubridora estándar $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, que como $\pi_1(\mathbb{R}) \cong \{1\}$ se tiene que es inyectiva.
   - La aplicación recubridora dada por:

   $$\begin{array}{rccc} p: & \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ & z & \longmapsto & z^n \end{array}$$

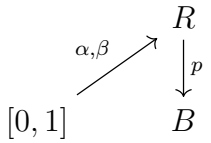
     Si $\deg([\alpha]) = k \in \mathbb{Z}$, entonces $\deg(p_*([\alpha])) = nk$. Por lo que es inyectiva.

   Por tanto, a priori podemos pensar que la afirmación es verdadera. Veámoslo.

   Sean $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(R, r_0)$ tales que $p_*([\alpha]) = p_*([\beta])$. Por definición de p_*, se tiene que:

   $$[p \circ \alpha] = [p \circ \beta] \in \pi_1(B, p(r_0)).$$

   Tenemos la siguiente situación:

   Como $[p \circ \alpha] = [p \circ \beta]$, entonces:

   $$(p \circ \alpha)(0) = (p \circ \beta)(0) = p(r_0)$$

   Por tanto, como los arcos se pueden levantar, si elegimos $\widetilde{p \circ \alpha}$ y $\widetilde{p \circ \beta}$ como los levantamientos de $p \circ \alpha$ y $p \circ \beta$ que cumplen $\widetilde{p \circ \alpha}(0) = \widetilde{p \circ \beta}(0) = r_0$, entonces:

   $$[\widetilde{p \circ \alpha}] = [\widetilde{p \circ \beta}] \in \pi_1(R, r_0)$$

   Por la unicidad de los levantamientos, se tiene que $\widetilde{p \circ \alpha} = \alpha$ y $\widetilde{p \circ \beta} = \beta$. Por tanto:

   $$[\alpha] = [\beta] \in \pi_1(R, r_0)$$

   Por tanto, p_* es inyectiva y la afirmación es verdadera.

2. Si $f : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{S}^1$ es una aplicación continua y $x_0 \in \mathbb{RP}^2$, entonces el homomorfismo $f_* : \pi_1(\mathbb{RP}^2, x_0) \to \pi_1(\mathbb{S}^1, f(x_0))$ es trivial.

   Sabemos que $\pi_1(\mathbb{RP}^2, x_0) \cong \mathbb{Z}_2$ y $\pi_1(\mathbb{S}^1, f(x_0)) \cong \mathbb{Z}$. Por tanto, existen isomorfismos $\phi : \pi_1(\mathbb{RP}^2, x_0) \to \mathbb{Z}_2$ y $\psi : \pi_1(\mathbb{S}^1, f(x_0)) \to \mathbb{Z}$. Consideramos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{RP}^2, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(\mathbb{S}^1, f(x_0)) \\ \cong\downarrow\phi & & \cong\downarrow\psi \\ \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\quad g \quad} & \mathbb{Z} \end{array}$$

   Definimos por tanto $g = \psi \circ f_* \circ \phi^{-1} : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$. Como g es un homomorfismo de grupos, se tiene que $g(0) = 0$. Además:

$$0 = g(0) = g(1+1) = g(1) + g(1) = 2g(1) \Longrightarrow g(1) = 0$$

   Por tanto, g es el homomorfismo trivial. Como $g = \psi \circ f_* \circ \phi^{-1}$ y ψ y ϕ son isomorfismos, se tiene que f_* es el homomorfismo trivial. Por tanto, la afirmación es verdadera.

3. Si $X = U \cup V$ con U, V abiertos simplemente conexos entonces X es simplemente conexo.

   Veamos un contraejemplo. Consideremos $X = \mathbb{S}^1$, $U = \mathbb{S}^1 \setminus \{(0,1)\}$ y $V = \mathbb{S}^1 \setminus \{(0,-1)\}$. Los conjuntos U, V se muestran en la Figura 1.

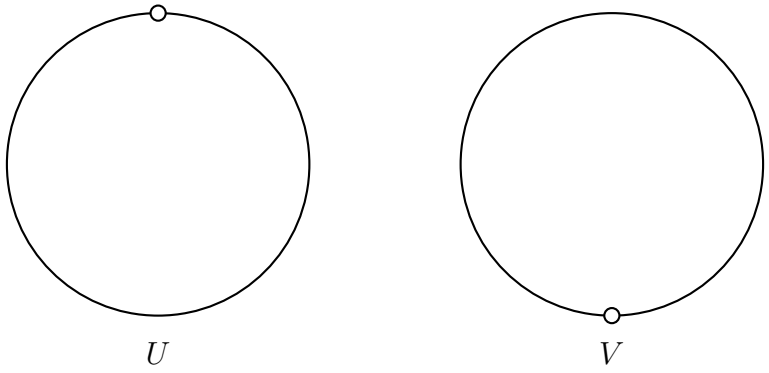


Figura 1: Conjuntos U, V.

   Tenemos que $X = U \cup V = \mathbb{S}^1$, con U, V abiertos y homeomorfos a $\mathbb{R}$, por lo que son simplemente conexos. Sin embargo, X no es simplemente conexo, ya que $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$. Por tanto, la afirmación es falsa. A la hora de aplicar el teorema de Van Kampen, necesitamos que $U \cap V$ sea arcoconexo, lo cual no se cumple en este caso.

Ejercicio 2 (5 puntos)**.** Consideremos el cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ y $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ un arco inyectivo que interseca al cilindro exactamente en los puntos $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$. Calcula el grupo fundamental de

$$X = (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \cup \alpha([0,1])$$

en un punto $p_0 \in X$. Determina lazos basados en p_0 cuyas clases de equivalencia generen $\pi_1(X, p_0)$.